Dokuz Eylül University, The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

2018-2019 Academic Year M.Sc. Entrance Examination
(2018-2019 Öğretim Yılı Yüksek Lisans Giriş Sınavı)

Name Surname: **Time:** 09:00-12:00 **Date:** 15.08.2018

Sign:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

- In this examination there are 12 questions each of which is 10 points and you have to solve any 10 of these 12 questions.
- Write your solutions neatly and clearly.
- You have 3 hours to solve these ten questions.
- The INTERVIEW EXAM will start at 13:00.

GOOD LUCK!

- Bu sınavda herbiri 10 puanlık toplam 12 soru vardır ve bu 12 sorunun herhangi 10 tanesini çözmelisiniz.
- Çözümlerinizi açıkça ve düzgünce yazınız.
- Bu on soruyu çözmek için 3 saatiniz vardır.
- MÜLAKAT SINAVI saat 13:00'de başlayacaktır.

BAŞARILAR!

---

1. For $n \geqslant 1$ show that $\sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$.

   $n \geqslant 1$ için $\sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$ olduğunu gösteriniz.

2. Let $f : X \to Y$ be a function.

   (a) **Disprove:** If f is a surjection, then
   $$Y - f(A) = f(X - A) \text{ for all } A \subseteq X.$$

   (b) **Prove:** f is a bijection *if and only if*
   $$Y - f(A) = f(X - A) \text{ for all } A \subseteq X.$$

   $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

   (a) **Çürüt:** Eğer f örten bir fonksiyon ise her $A \subseteq X$ için $Y - f(A) = f(X - A)$ dır.

   (b) **Kanıtla:** f birebir örten fonksiyon *ancak ve ancak* her $A \subseteq X$ için $Y - f(A) = f(X - A)$ dır.

3. Suppose that f is an atleast twice differentiable function satisfying $f(0) = -2$, $f'(0) = 11$, $f(2) = 5$, $f'(2) = -3$ and also suppose that the function
   $$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
   has a *critical point* at $x = 2$.

   (a) Find $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

   (b) Find $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

   f, en az iki kez türevlenebilen ve $f(0) = -2$, $f'(0) = 11$, $f(2) = 5$, $f'(2) = -3$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun ve
   $$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$
   fonksiyonu da $x = 2$ de kritik noktaya sahip olsun.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ limitinin değerini bulunuz..

   (b) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ integralinin değerini hesaplayınız.

4. Suppose that $a \in (0, \infty)$ is fixed. Choose $x_1 > \sqrt{a}$ and define
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad n \in \mathbb{Z}^+$$
   Show that $x_n \longrightarrow \sqrt{a}$.

   $a \in (0, \infty)$ sabit bir sayı olsun. Bir $x_1 > \sqrt{a}$ sayısı seçelim ve
   $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \; n \in \mathbb{Z}^+$$
   özyineleme bağıntısını tanımlayalım. $x_n \longrightarrow \sqrt{a}$ olduğunu gösteriniz.

5. Find the radius of convergence and interval of convergence of the power series
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}.$$

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

6.

Let $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 2y \text{ and } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ and define $f : D \to \mathbb{R}$ by

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

Find all extremum values of f.

$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 2y \text{ and } x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ olsun ve $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$$

kuralıyla tanımlansın. f fonksiyonunun tüm uç değerlerini bulunuz.

7. Let $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ be n distinct real numbers. Show that the functions $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ are linearly independent.

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ birbirinden farklı n tane real sayı olsun. $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ fonksiyonlarının doğrusal bağımsız olduğunu gösteriniz.

8. Let T be the linear transformation from the vector space of real polynomials of degree $\leqslant 2$ to the vector space of 2×2 real matrices satisfying

$$\begin{aligned} T(1-x+x^2) &= \begin{pmatrix} a & a \\ -b & 2 \end{pmatrix} \\ T(-1+x+3x^2) &= \begin{pmatrix} b & -2 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\ T(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Find a, b, c and d.

T, derecesi 2 veya daha küçük olan polinomların uzayından 2×2'lik reel matrislerin uzayına

$$\begin{aligned} T(1-x+x^2) &= \begin{pmatrix} a & a \\ -b & 2 \end{pmatrix} \\ T(-1+x+3x^2) &= \begin{pmatrix} b & -2 \\ c & 2 \end{pmatrix} \\ T(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir doğrusal dönüşüm olsun. a, b, c ve d bilinmeyenlerini bulunuz.

9. Let G be a group which has no proper non-trivial subgroup. Prove that G is a cyclic group.

G, aşikar olmayan öz alt grubu olmayan bir grup olsun. G'nin devirli bir grup olduğunu kanıtlayınız.

10. Let R be a ring with unit. Show that the quotient ring $R[x]/(x)$ is isomorphic to R.

R birimli bir halka olsun. $R[x]/(x)$ bölüm halkasının R halkasına izomorf olduğunu gösteriniz.

11. Find the general solution of the initial value problem

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 30\cos(3t) \\ y(0) = 3, \ y'(0) = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 30\cos(3t) \\ y(0) = 3, \ y'(0) = 4. \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin genel çözümünü bulunuz.

12. Find the general solution of the Riccati differential equation

$$y' = \frac{y^2}{t^2} + \frac{y}{t} - 1$$

after verifying that $\varphi_1(t) := t$ is one of its particular solution.

$\varphi_1(t) := t$ fonksiyonunun bir özel çözüm olduğunu göstererek

$$y' = \frac{y^2}{t^2} + \frac{y}{t} - 1$$

Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

SIGN: